ファジィ環境下における評価基準について(最適化理論と数理構造)

AUTHOR(S):

藤田, 敏治

数理解析研究所講究録
第 864 巻 1994 年 195-202

ファジィ環境下における評価基準について

九州大学理学部　藤田敏治 (Toshiharu Fujita)

1　不変埋没原理に基づく再帰式

ファジィ環境下における確率的推移システムを考える。システム及び記号等は基本的に Bellman and Zadeh が [1] で用いたものに従う。すなわち、このシステムにおいて、状態空間 X 及び、政策空間 U は有限集合とし、各ステージにおける利得はファジィで評価され、メンバーシップ関数 $\mu_i(u_i)$（終端利得は $\mu_{G^N}(x_N)$ ）で表される。すなわち、システムの評価基準は所定の制約を満たしながらゴール（目標）に到達する迄の直積（履歴）空間におけるメンバーシップ関数で表され、最小型の評価基準となる。ここで我々が考えるのは、さらにこの最小型評価基準の関数を考え、それを最大化する意志決定過程を構成することである。具体的には、次のような問題を考える。

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & E[f(\mu_0(u_0)\wedge\mu_1(u_1)\wedge\cdots\wedge\mu_{N-1}(u_{N-1})\wedge\mu_{G^N}(x_N))] \\
\text{subject to} & (\mathrm{i})_\mathrm{n} \quad x_{n+1}\sim p(\cdot\,|\,x_n,u_n) \quad 0\le n\le N-1 \\
 & (\mathrm{ii})_\mathrm{n} \quad u_n\in U \quad 0\le n\le N-1.
\end{array}
\tag{1}
$$

ただし、$a\wedge b:=\min(a,b)$ で、E はマルコフ型条件付き確率 $p(x_{n+1}\,|\,x_n,u_n)$, 政策$\pi=\{\pi_0,\pi_1,...,\pi_{N-1}\}$ 、および初期状態 x_0 で一意に定まる直積空間 $U\times X\times U\times X\times\cdots\times U\times X$ 上の期待値（積分）作用素である。また、f は $[0,1]$ 上の関数である。

動的計画法により問題 (1) の解法を考えるのだが、まずは各 $x_{N-\nu}$ 毎に部分問題

$$
\begin{aligned}
\mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu}) = \text{Max}\ \ & E[f(\mu_{N-\nu}(u_{N-\nu})\wedge\cdots\wedge\mu_{N-1}(u_{N-1})\wedge\mu_{G^N}(x_N)) \\
& \qquad |\,(\mathrm{i})_\mathrm{m},\ (\mathrm{ii})_\mathrm{m} \quad N-\nu\le m\le N-1]
\end{aligned}
$$

を考えるのが自然であろう。しかしここでは、不変埋没原理による再帰式を導く。このために、問題 (1) を実パラメータ λ を含む次の問題群に埋め込んで考える。

$$
\begin{aligned}
\mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu};\lambda) = \text{Max}\ \ & E[f(\lambda\wedge\mu_{N-\nu}(u_{N-\nu})\wedge\cdots\wedge\mu_{N-1}(u_{N-1})\wedge\mu_{G^N}(x_N)) \\
& \qquad |\,(\mathrm{i})_\mathrm{m},\ (\mathrm{ii})_\mathrm{m} \quad N-\nu\le m\le N-1] \qquad (2)\\
& \qquad\qquad 1\le\nu\le N
\end{aligned}
$$

$$
\mu_{G^N}(x_N;\lambda) = f(\lambda\wedge\mu_{G^N}(x_N)),\quad 0\le\lambda\le 1.
$$

このとき、次の再帰式が成り立つ。

Theorem 1

$$
\begin{aligned}
\mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu};\lambda) = \underset{u_{N-\nu}}{\text{Max}} \sum_{x_{N-\nu+1}} & \mu_{G^{N-\nu+1}}(x_{N-\nu+1};\lambda\wedge\mu_{N-\nu}(u_{N-\nu})) \\
& \times p(x_{N-\nu+1}|x_{N-\nu},u_{N-\nu}) \qquad (3)\\
x_{N-\nu}\in X,\quad 0\le\lambda\le 1 & \qquad \nu=1,2,\cdots,N
\end{aligned}
$$

$$
\mu_{G^N}(x_N;\lambda) = f(\lambda\wedge\mu_{G^N}(x_N)) \qquad x_N\in X,\quad 0\le\lambda\le 1. \tag{4}
$$

一般に、２つの関数 $\mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu};\lambda)$, $\mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu})$ の間は

$$\mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu};\lambda) \neq \lambda \wedge \mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu}) \qquad \nu = 1,2,\cdots,N-1 \tag{5}$$

であるが、特に、$\lambda = 1$ のとき,

$$\mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu};1) = \mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu}) \qquad \nu = 1,2,\cdots,N-1 \tag{6}$$

であり、再帰式 (3),(4) を解いて、問題 (1) の求める最適値

$$\mu_{G^0}(x_0) = \mu_{G^0}(x_0;1) \tag{7}$$

が得られる。

問題（１）における $f(x)$ としては (I) $f(x) = x$, (II) $f(x) = x^2$ など連続関数はもちろん、(III) $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ などの特性関数等様々な関数が考えられる。

(I) $f(x) = x$ のときは、次の最適化問題になる。

$$\begin{array}{lll} \text{Maximize} & E[\,\mu_0(u_0)\wedge\mu_1(u_1)\wedge\cdots\wedge\mu_{N-1}(u_{N-1})\wedge\mu_{G^N}(x_N)\,] & \\ \text{subject to} & (\mathrm{i})_{\mathrm{n}} \quad x_{n+1}\sim p(\cdot\mid x_n,u_n) \quad 0\le n\le N-1 & \\ & \quad (\mathrm{ii})_{\mathrm{n}} \quad u_n\in U \quad 0\le n\le N-1. & \end{array} \tag{8}$$

これは、R. Bellman and L. Zadeh [1], において、扱われている確率的推移システムであり、彼らは、当然この問題に対する解法も与えている。しかし確定的推移システムに対して正しかったその方法は、確率的なそれに対しては必ずしも正しい解を与えていない。全ての場合を書き出して最適解を求める所謂列挙法による解と一致しないのである。これに対し、定理１の再帰式に基づく我々の解法は、（ $f(x) = x$ とおいた際）この問題（８）に対する正しい解法を与える。

(II) $f(x) = x^2$ のときは次のようになる。

$$\begin{array}{lll} \text{Maximize} & E[(\mu_0(u_0)\wedge\mu_1(u_1)\wedge\cdots\wedge\mu_{N-1}(u_{N-1})\wedge\mu_{G^N}(x_N))^2\,] & \\ \text{subject to} & (\mathrm{i})_{\mathrm{n}},\ (\mathrm{ii})_{\mathrm{n}} & 0\le n\le N-1 \end{array}$$

(III) $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ のときは、確率最大化問題になる。

$$\begin{array}{lll} \text{Maximize} & P[a\le\mu_0(u_0)\wedge\mu_1(u_1)\wedge\cdots\wedge\mu_{N-1}(u_{N-1})\wedge\mu_{G^N}(x_N)\le b\,] & \\ \text{subject to} & (\mathrm{i})_{\mathrm{n}},\ (\mathrm{ii})_{\mathrm{n}} & 0\le n\le N-1 \end{array}$$

これらの問題はいずれも定理１の再帰式に基づいて解かれる。

2 再帰式の解法

前節において問題（1）に対する再帰式は導かれた。本節では、実際に再帰式を計算する上での効果的な方法を与える。ここでは、簡単のため (III) のみについて考える。一般の場合は、もう少し細かな議論が必要となるが、同様な方法で解くことは可能である。

Definition 1 $\{I_i|\ i=1,2,\cdots,n\}$ を区間の族で次を満たすものとする。

$$I_i \subset [0,1]\ (i=1,2,\cdots,n)\ ,\ \bigcup_{i=1}^{n} I_i=[0,1]\ ,\ I_i\cap I_j=\emptyset\ (i\neq j)\ ,$$
$$\sup(I_i)=\inf(I_{i+1})\ (i=1,2,\cdots,n-1)$$

このとき、$[\![\cdots]\!](\cdot)$ を次のように定義する。
（但し、$\mathcal{X}$ は特性関数、$\alpha_i,\alpha_{ji}\in\mathbf{R}$ $(i=1,2,\cdots,n\ ,\ \ j=1,2,\cdots,m\ )$

$$[\![\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]\!](x):=\alpha_1\mathcal{X}_{I_1}(x)+\alpha_2\mathcal{X}_{I_2}(x)+\cdots+\alpha_n\mathcal{X}_{I_n}(x) \tag{9}$$

$$\left[\!\!\left[\begin{array}{cccc}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\cdots&\alpha_{1n}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\cdots&\alpha_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \alpha_{m1}&\alpha_{m2}&\cdots&\alpha_{mn}\end{array}\right]\!\!\right](x):=\left(\begin{array}{c}[\![\alpha_{11},\alpha_{12},\cdots,\alpha_{1n}]\!](x)\\ [\![\alpha_{21},\alpha_{22},\cdots,\alpha_{2n}]\!](x)\\ \vdots\\ [\![\alpha_{m1},\alpha_{m2},\cdots,\alpha_{mn}]\!](x)\end{array}\right) \tag{10}$$

Example 1

$$m=4,$$
$$\alpha_1=0.3,\ \alpha_2=0,\ \alpha_3=0.6,\ \alpha_4=1$$
$$I_1=[0,0.2],\ I_2=(0.2,0.4],\ I_3=(0.4,0.9),\ I_4=[0.9,1]$$

のときは、

$$[\![0.4\ ,\ 0\ ,\ 0.6\ ,\ 1]\!](x)=0.3\times\mathcal{X}_{[0,0.2]}(x)\ +\ 0\times\mathcal{X}_{(0.2,0.4]}(x)\ +\ 0.6\times\mathcal{X}_{(0.4,0.9)}(x)\ +\ 1\times\mathcal{X}_{[0.9,1]}(x)$$

となり、

$$[\![0.4\ ,\ 0\ ,\ 0.6\ ,\ 1]\!](0.1)=0.3,\ \ [\![0.4\ ,\ 0\ ,\ 0.6\ ,\ 1]\!](0.4)=0,\ \ [\![0.4\ ,\ 0\ ,\ 0.6\ ,\ 1]\!](1)=1$$

□

以後、I_i $(i=1,2,\cdots,m)$ は定義 1 の条件を満たすものとし固定しておく。

Theorem 2 $\alpha_i,\beta_i,\alpha_{ji}$ $(i=1,2,\cdots,n\ ,\ \ j=1,2,\cdots,m\ )$ は全て実数とし、$p_{ij}\in\mathbf{R}^{l\times m}$ とする。このとき、次の (i) ～ (v) が成り立つ。

(i) $$[\![\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\!](x)+[\![\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]\!](x)=[\![\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n]\!](x)$$

(ii) $$r[\![\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\!](x)=[\![r\alpha_1,r\alpha_2,\cdots,r\alpha_n]\!](x)\quad \text{for}\ \ {}^{\forall}r\in\mathbf{R}$$

(iii)

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{l1} & p_{l2} & \cdots & p_{lm} \end{pmatrix} \left[\!\!\left[\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{matrix} \right]\!\!\right](x)$$

$$= \left[\!\!\left[\begin{matrix} \sum_{j=1}^m p_{1j}\alpha_{j1} & \sum_{j=1}^m p_{1j}\alpha_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^m p_{1j}\alpha_{jn} \\ \sum_{j=1}^m p_{2j}\alpha_{j1} & \sum_{j=1}^m p_{2j}\alpha_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^m p_{2j}\alpha_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^m p_{lj}\alpha_{j1} & \sum_{j=1}^m p_{lj}\alpha_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^m p_{lj}\alpha_{jn} \end{matrix} \right]\!\!\right](x)$$

(iv) ${}^\forall c \in [0,1]$ に対し、$n_0 \in \{1,2,\cdots,n\}$ が存在して

$$c \in I_{n_0}\ ,\quad [\![\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\!](x \wedge c) = [\![\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n_0-1},\alpha_{n_0},\alpha_{n_0},\cdots,\alpha_{n_0}]\!](x)$$

(v)

$$\max_j \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \max_j a_{1j} \\ \max_j a_{2j} \\ \vdots \\ \max_j a_{mj} \end{pmatrix}$$

と定義すると、

$$\max_j \left[\!\!\left[\begin{matrix} \alpha_{11}^j & \alpha_{12}^j & \cdots & \alpha_{1n}^j \\ \alpha_{21}^j & \alpha_{22}^j & \cdots & \alpha_{2n}^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1}^j & \alpha_{m2}^j & \cdots & \alpha_{mn}^j \end{matrix} \right]\!\!\right](x) = \left[\!\!\left[\begin{matrix} \max_j \alpha_{11}^j & \max_j \alpha_{12}^j & \cdots & \max_j \alpha_{1n}^j \\ \max_j \alpha_{21}^j & \max_j \alpha_{22}^j & \cdots & \max_j \alpha_{2n}^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \max_j \alpha_{m1}^j & \max_j \alpha_{m2}^j & \cdots & \max_j \alpha_{mn}^j \end{matrix} \right]\!\!\right](x)$$

Proof. (i), (ii), (v) は定義より直ちにわかる。

(iii)

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{l1} & p_{l2} & \cdots & p_{lm} \end{pmatrix} \left[\!\!\left[\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{matrix} \right]\!\!\right](x)$$

$$= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{l1} & p_{l2} & \cdots & p_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\![\alpha_{11},\alpha_{12},\cdots,\alpha_{1n}]\!](x) \\ \vdots \\ [\![\alpha_{m1},\alpha_{m2},\cdots,\alpha_{mn}]\!](x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_{11}[\![\alpha_{11},\alpha_{12},\cdots,\alpha_{1n}]\!](x) + \cdots + p_{1m}[\![\alpha_{m1},\alpha_{m2},\cdots,\alpha_{mn}]\!](x) \\ \vdots \\ p_{l1}[\![\alpha_{11},\alpha_{12},\cdots,\alpha_{1n}]\!](x) + \cdots + p_{lm}[\![\alpha_{m1},\alpha_{m2},\cdots,\alpha_{mn}]\!](x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} [\![p_{11}\alpha_{11} + \cdots + p_{1m}\alpha_{m1},\ \cdots\ ,p_{11}\alpha_{1n} + \cdots + p_{1m}\alpha_{mn}]\!](x) \\ \vdots \\ [\![p_{l1}\alpha_{11} + \cdots + p_{lm}\alpha_{m1},\ \cdots\ ,p_{l1}\alpha_{1n} + \cdots + p_{lm}\alpha_{mn}]\!](x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} [\![\sum_{j=1}^m p_{1j}\alpha_{j1}, \sum_{j=1}^m p_{1j}\alpha_{j2}, \cdots, \sum_{j=1}^m p_{1j}\alpha_{jn}]\!](x) \\ \vdots \\ [\![\sum_{j=1}^m p_{lj}\alpha_{j1}, \sum_{j=1}^m p_{lj}\alpha_{j2}, \cdots, \sum_{j=1}^m p_{lj}\alpha_{jn}]\!](x) \end{pmatrix}$$

(iv) I_n の定義より、$c \in I_{n_0}$ となる $n_0 \in \{1, 2, \cdots, n\}$ は存在する。
このとき、$x < c$ ならば、

$$[\![\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]\!](x \wedge c) = \alpha_1 \chi_{I_1}(x) + \alpha_2 \chi_{I_2}(x) + \cdots + \alpha_{n_0} \chi_{I_{n_0}}(x)$$

$x \geq c$ ならば、

$$[\![\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]\!](x \wedge c) = [\![\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l]\!](c) = \alpha_{n_0} \chi_{I_{n_0}}(c) = \alpha_{n_0}$$

従って、

$$\begin{aligned} [\![\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]\!](x \wedge c) &= \alpha_1 \chi_{I_1}(x) + \alpha_2 \chi_{I_2}(x) + \cdots + \alpha_{n_0 - 1} \chi_{I_{n_0-1}}(x) \\ &\quad + \alpha_{n_0} \chi_{I_{n_0}}(x) + \alpha_{n_0} \chi_{I_{n_0+1}}(x) + \cdots + \alpha_{n_0} \chi_{I_n}(x) \end{aligned}$$

□

記号 $[\![\cdots]\!](\cdot)$ を用い、定理 1 の再帰式を書き直してみよう。簡単のため、

$$X = \{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m\}, \quad U = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l\}$$

とおく。
まず、$\mu_{G^N}(x_N; \lambda)$ を計算し、

$$\mu_{G^N}(\sigma_i; \lambda) = [\![a_{i1}^N, a_{i2}^N, \cdots, a_{in}^N]\!](\lambda), \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

と表す。次に、

$$\mu_{G^{N-\nu+1}}(\sigma_i; \lambda) = [\![a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}]\!](\lambda), \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

と表せているとする。このとき、

$$\mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu}; \lambda) = \max_{u_{N-\nu}} \sum_{x_{N-\nu+1}} \mu_{G^{N-\nu+1}}(x_{N-\nu+1}; \lambda \wedge \mu_{N-\nu}(u_{N-\nu})) \times p(x_{N-\nu+1} | x_{N-\nu}, u_{N-\nu})$$

$$= \max_{j=1,2,\cdots,l} \sum_{i=1}^m [\![a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}]\!](\lambda \wedge \mu_{N-\nu}(\alpha_j)) \times p(\sigma_i | x_{N-\nu}, \alpha_j)$$

$$= \max_{j=1,2,\cdots,l} (p(\sigma_1 | x_{N-\nu}, \alpha_j), \cdots, p(\sigma_m | x_{N-\nu}, \alpha_j)) \left[\!\!\left[\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right]\!\!\right] (\lambda \wedge \mu_{N-\nu}(\alpha_j))$$

よって、

$$\begin{pmatrix} \mu_{G^{N-\nu}}(\sigma_1; \lambda) \\ \vdots \\ \mu_{G^{N-\nu}}(\sigma_m; \lambda) \end{pmatrix}$$

$$= \max_{j=1,2,\cdots,l} \begin{pmatrix} p(\sigma_1 | \sigma_1, \alpha_j) & \cdots & p(\sigma_m | \sigma_1, \alpha_j) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p(\sigma_1 | \sigma_m, \alpha_j) & \cdots & p(\sigma_m | \sigma_m, \alpha_j) \end{pmatrix} \left[\!\!\left[\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right]\!\!\right] (\lambda \wedge \mu_{N-\nu}(\alpha_j))$$

Theorem 2 の (iii), (iv), (v) から、これを計算すると次の形になることがわかる。

$$\begin{pmatrix} \mu_{G^{N-\nu}}(\sigma_1;\lambda) \\ \vdots \\ \mu_{G^{N-\nu}}(\sigma_m;\lambda) \end{pmatrix} = \left[\!\left[\begin{matrix} a'_{11} & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m1} & \cdots & a'_{mn} \end{matrix} \right]\!\right](\lambda)$$

あとはこれを繰り返し、

$$\begin{pmatrix} \mu_{G^0}(\sigma_1;\lambda) \\ \vdots \\ \mu_{G^0}(\sigma_m;\lambda) \end{pmatrix}$$

を求める。

Example 2 確率最大化問題 (III) を考える。但し $a = 0.4,\ b = 0.7$ とし、諸条件は、Bellman and Zadeh の例題と同じとする。すなわち、システムは、3 つの状態 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ と 2 つの入力 α_1, α_2 をもち、$N = 2$ である:

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & P[0.4 \le \mu_0(u_0) \wedge \mu_1(u_1) \wedge \mu_{G^2}(x_2) \le 0.7] \\ \text{subject to} \quad & x_{n+1} \sim p(\cdot \mid x_n, u_n), \quad n = 0, 1 \\ & u_n \in U, \quad n = 0, 1. \end{aligned}$$

また、各ステージにおける利得及び推移確率は次で与えられる。

$$\mu_{G^2}(\sigma_1) = 0.3, \quad \mu_{G^2}(\sigma_2) = 1.0, \quad \mu_{G^2}(\sigma_3) = 0.8$$

$$\mu_1(\alpha_1) = 1.0, \qquad \mu_1(\alpha_2) = 0.6$$

$$\mu_0(\alpha_1) = 0.7, \qquad \mu_0(\alpha_2) = 1.0$$

$p(x_{t+1}|x_t, u_t)$ の値：

$u_t = \alpha_1$

$x_t \diagdown x_{t+1}$	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1	0.8	0.1	0.1
σ_2	0.0	0.1	0.9
σ_3	0.8	0.1	0.1

$u_t = \alpha_2$

$x_t \diagdown x_{t+1}$	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1	0.1	0.9	0.0
σ_2	0.8	0.1	0.1
σ_3	0.1	0.0	0.9

$l = 3, I_1 = [0, 0.4), I_2 = [0.4, 0.7], I_3 = (0.7, 1]$ と置き、記号 $[\![\cdots]\!](\cdot)$ を用いて解く。
まず、$N = 2$ のとき、

$$\begin{aligned} \mu_{G^2}(\sigma_1;\lambda) &= \chi_{[0.4,0.7]}(\lambda \wedge 0.3) = [\![0,1,0]\!](\lambda \wedge 0.3) = [\![0,0,0]\!](\lambda) \\ \mu_{G^2}(\sigma_2;\lambda) &= \chi_{[0.4,0.7]}(\lambda \wedge 1) = [\![0,1,0]\!](\lambda \wedge 1) = [\![0,1,0]\!](\lambda) \\ \mu_{G^3}(\sigma_2;\lambda) &= \chi_{[0.4,0.7]}(\lambda \wedge 0.8) = [\![0,1,0]\!](\lambda \wedge 0.8) = [\![0,1,0]\!](\lambda) \end{aligned}$$

次に、$N=1$ のとき、

$$
\begin{pmatrix} \mu_{G^1}(\sigma_1;\lambda) \\ \mu_{G^1}(\sigma_2;\lambda) \\ \mu_{G^1}(\sigma_3;\lambda) \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} (\lambda \wedge 1) \vee \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} (\lambda \wedge 0.6)
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} (\lambda) \vee \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} (\lambda)
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix} (\lambda) \vee \begin{bmatrix} 0 & 0.9 & 0.9 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.9 & 0.2 \end{bmatrix} (\lambda)
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & 0.9 & 0.9 \\ 0 & 1 & 0.2 \\ 0 & 0.9 & 0.9 \end{bmatrix} (\lambda)
$$

対応する政策は、

$$
\tilde{\pi}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \text{ or } \alpha_2 & , & \alpha_2 & , & \alpha_2 \\ \alpha_1 \text{ or } \alpha_2 & , & \alpha_1 & , & \alpha_2 \\ \alpha_1 \text{ or } \alpha_2 & , & \alpha_2 & , & \alpha_2 \end{pmatrix}
$$

で与えられる。

最後に、$N=0$ のとき、

$$
\begin{pmatrix} \mu_{G^0}(\sigma_1;\lambda) \\ \mu_{G^0}(\sigma_2;\lambda) \\ \mu_{G^0}(\sigma_3;\lambda) \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.9 & 0.9 \\ 0 & 1 & 0.2 \\ 0 & 0.9 & 0.9 \end{bmatrix} (\lambda \wedge 0.7) \vee \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.9 & 0.9 \\ 0 & 1 & 0.2 \\ 0 & 0.9 & 0.9 \end{bmatrix} (\lambda \wedge 1)
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.9 & 0.9 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0.9 & 0.9 \end{bmatrix} (\lambda) \vee \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 & 0 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.9 & 0.9 \\ 0 & 1 & 0.2 \\ 0 & 0.9 & 0.9 \end{bmatrix} (\lambda)
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & 0.91 & 0.91 \\ 0 & 0.91 & 0.91 \\ 0 & 0.91 & 0.91 \end{bmatrix} (\lambda) \vee \begin{bmatrix} 0 & 0.99 & 0.27 \\ 0 & 0.91 & 0.83 \\ 0 & 0.90 & 0.90 \end{bmatrix} (\lambda)
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & 0.99 & 0.91 \\ 0 & 0.91 & 0.91 \\ 0 & 0.91 & 0.91 \end{bmatrix} (\lambda)
$$

対応する政策は、

$$
\tilde{\pi}_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \text{ or } \alpha_2 & , & \alpha_2 & , & \alpha_1 \\ \alpha_1 \text{ or } \alpha_2 & , & \alpha_1 \text{ or } \alpha_2 & , & \alpha_1 \\ \alpha_1 \text{ or } \alpha_2 & , & \alpha_1 & , & \alpha_1 \end{pmatrix}
$$

で与えられる。
以上より、

$$\begin{pmatrix} \mu_{G^0}(\sigma_1) \\ \mu_{G^0}(\sigma_2) \\ \mu_{G^0}(\sigma_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{G^0}(\sigma_1; 1) \\ \mu_{G^0}(\sigma_2; 1) \\ \mu_{G^0}(\sigma_3; 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.91 \\ 0.91 \\ 0.91 \end{pmatrix}$$

最適政策は、$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ いずれから出発した場合でも、

$$\alpha_1 \longrightarrow \{\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2\}$$

となる。 □

Reference

[1] R. Bellman and L. Zadeh, *Decision-making in a fuzzy environment*, Management Science 17, 141-164, 1970